

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatika instituut

Matemaatika eriala

Kerttu Lääne

Dünaamika ülesannete modelleerimine programmi Stella abil

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Ella Puman

Annely Mürk

Tartu 2015

Dünaamika ülesannete modelleerimine programmi Stella abil

Bakalaureusetöö

Kerttu Lääne

Lühikokkuvõte. Antud bakalaureusetöös käsitletakse dünaamika ülesandeid, mis põhinevad diferentsiaalvõrranditel ning mis muutuvad ajas. Töö põhineb kahel dünaamika ülesandel: keha viskamise ja allveelaeva sukeldumise ülesandel. Mõlemal juhul on antud ülesande püstitus, põhivalemid, nende lahendus ning mudelite kirjeldused ja graafikud, mis on saadud programmi Stella mudelite põhjal.

Märksõnad. Stella, dünaamika, õhutakistus, liikumisvõrrand, kiirus, liikumistrajektor.

Modelling of dynamical systems in Stella

Bachelor's thesis

Kerttu Lääne

Abstract. In this bachelor's thesis dynamical systems which are based on differential equations and change in time are used. The thesis consists of two dynamical tasks: throwing an object and submarine diving. In both case formulation of the problem, basic equations, their solutions, models descriptions and graphs which are developed with a graphical simulation program Stella are given.

Keywords. Stella, dynamics, air resistance, equations of motion, velocity, trajectory of movement.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1. Keha viskamise ülesanne	5
1.1. Kivi viskamise ülesanne õhutakistust arvestamata.....	6
1.2. Kivi viskamise ülesanne arvestades õhutakistust.	13
2. Allveelaeva sukeldumise ülesanne.....	24
3. Programmi Stella tutvustus	30
Kokkuvõte	32
Kasutatud kirjandus.....	33
Lisad	34
Lisa 1. Kivi viskamise programmikood Stellas õhutakistust arvestamata.	34
Lisa 2. Kivi viskamise programmikood Stellas arvestades õhutakistust.....	34
Lisa 3. Allveelaeva sukeldumise programmikood Stellas.....	35

Sissejuhatus

Käesoleva töö eesmärk on dünaamika näiteülesannete analüütiline lahendamine ning nende ülesannete modelleerimine programmi Stella abil. Modelleerimisülesannete jaoks on koostatud vastavad mudelid, mille lahendamisel saadud tulemuste illustreerimiseks on esitatud erinevaid graafikuid.

Dünaamikaks nimetatakse mehaanika osa, milles uuritakse materiaalsete kehade liikumist neile rakendatud jõudude mõjul. Seega dünaamikas uuritakse kehade liikumist neile rakendatud jõudude toimel ning samuti ka seda, kuidas kehade liikumine jõudude muutumisel muutub. Dünaamikas on jõud muutuvaks suuruseks. Dünaamika ülesannete korral on lähtutud dünaamika põhiseadusest, mille põhjal on saadud vastavad diferentsiaalvõrrandite süsteemid. [1]

Töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis vaadeldakse keha viskamise ülesannet nii õhutakistust arvestades kui õhutakistust mitte arvestades. Mõlemal juhul on koostatud ka mudelid programmis Stella, mille põhjal saadud tulemusi võrreldakse eelnevalt analüütiliselt saadud tulemustega.

Teises peatükis on leitud allveelaeva sukeldumiskiiruse võrrand ning koostatud vastav mudel programmis Stella. Saadud mudeli põhjal on uuritud näiteks Ohio tüüpi allveelaeva laskumist periskoobi sügavusele.

Viimases peatükis tutvustatakse modelleerimisprogrammi Stella. Stella pakub lõputult võimalusi mudelite katsetamiseks erinevate algandmete korral. Antud töös olevad mudelid on matemaatilised mudelid. Matemaatiliste mudelite koostamise jaoks on kasutatud matemaatilisi kontseptsioone, nagu funktsioonid, võrrandid või võrratused. Programmi kasutaja saab ise vastavalt soovile valida, kas soovib tulemusi saada graafikute või tabelitena. [2]

1. Keha viskamise ülesanne

Antud teema selgitamiseks on kasutatud K. Kenki ja J. Kirsi õpikut „Mehaanika alused“ III osa [1].

Dünaamika 2. aksioom ehk dünaamika põhiseadus ütleb, et punktmassi kiirendus on mõjuva jõuga võrdeline ja samasuunaline

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

kus võrdeteguriks on keha mass m .

Kõiki maapinna lähedal asuvaid kehasid tõmbab Maa enda poole raskusjõuga \vec{P} . Iga keha omandab raskusjõu mõjul vabalangemisel Maale ühe ning sama kiirenduse \vec{g} , mida nimetatakse raskuskiirenduseks. Kui peale raskusjõu ei mõju punktimassile teisi jõudusid, siis

$$\vec{P} = m\vec{g},$$

millest saadakse seos moodulite vahel

$$P = mg.$$

Selles töös on arvutusteks võetud raskuskiirendus väärtusega $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Punkti dünaamika II põhiülesandes on antud masspunktile mõjuvad jõud ja tuleb määrata punkti liikumine. Ülesanne lahendatakse dünaamika põhiseaduse abil. Projekteeritakse vektorvõrrand $\vec{F} = m\vec{a}$ Descartes'i koordinaattelgedele x, y, z

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z, \end{cases}$$

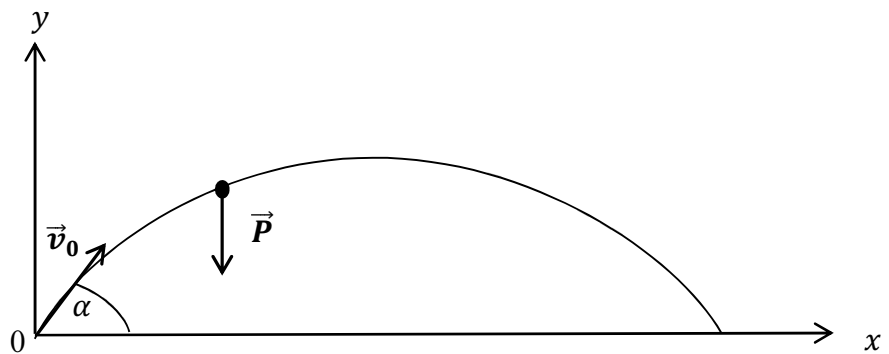
kus F_x, F_y, F_z on punktile mõjuva jõu projektsioonid vastavalt x -, y - ja z -teljele.

1.1. Kivi viskamise ülesanne õhutakistust arvestamata.

Antud ülesande jaoks on kasutatud Ü. Lepiku ja L. Rootsi õpikut „Teoreetiline mehaanika“ [3].

Kivi visatakse algkiirusega v_0 nurga α all horisondi suhtes. Leiame kivi liikumise võrrandid, kui õhutakistust ei arvestata.

Kuna õhutakistust pole vaja arvestada, siis ainuke kehale mõjuv jõud on raskusjõud. Koordinaatide alguspunktiks valime punkti, kust kivi üles visatakse. Vertikaalteljeks valime telje y suunaga üles ning horisontaalteljeks x -telje, mis on suunatud keha liikumise suunas.



Joonis 1.1. Keha viskeparabool ([1]).

Kivile rakendatud jõu \vec{F} projektsioonid koordinaattelgedele on

$$F_x = 0 \text{ ja } F_y = -P = -mg.$$

Dünaamika põhiseaduse põhjal saame liikumise põhivõrrandid

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & |:m \\ m\ddot{y} = -mg & |:m \end{cases}$$
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \quad (1.1)$$

Integreerides süsteemi (1.1) võrrandeid saame

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_3 \end{cases} \quad (1.2)$$

ja teist korda integreerides

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \end{cases} \quad (1.3)$$

Integreerimiskonstantide leidmiseks kasutame algtingimusi

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{0x} \\ \dot{y}(0) = v_{0y}. \end{cases}$$

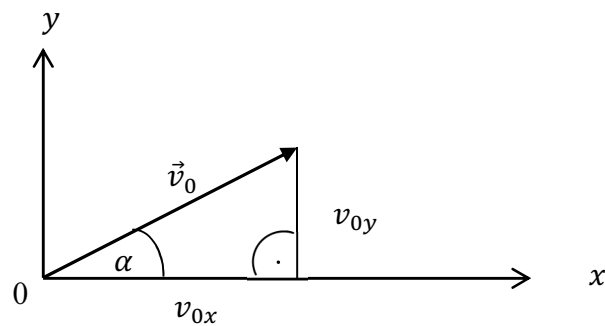
Projekteerime algkiirusvektori v_0 nii x - kui y -teljele (Joonis 1.2) arvestades järgmiseid seoseid

$$\cos \alpha = \frac{v_{0x}}{v_0}, v_{0x} = v_0 \cos \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{v_{0y}}{v_0}, v_{0y} = v_0 \sin \alpha,$$

mille tulemusena saame algtingimused kiirustele

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$



Joonis 1.2. Algkiirus ([1]).

Süsteemide (1.2) ja (1.3) põhjal saame

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = C_1 \\ \dot{y}(0) = C_3 \\ C_2 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos \alpha \\ C_3 = v_0 \sin \alpha \\ C_2 = C_4 = 0. \end{cases}$$

Pärast integreerimiskonstantide asendamist süsteemi (1.3) saame lahendi järgmisel kujul

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.4)$$

Kui võtta algkiiruse väärtuseks 30 m/s ja algnurgaks 30°, siis süsteemi (1.4) põhjal saame lennuajaks $t = 3,0612$ sekundit.

Kui vaadelda olukorda, kus kivi visatakse algkõrguselt $y(0) = h$, siis (1.3) põhjal saame

$$C_4 = h$$

ning seega teine võrrand süsteemis (1.4) avaldub kujul

$$y = -\frac{9.8t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + h.$$

Võtame näiteks algkõrguse $y(0) = 20$ meetrit, mille asendamisel saadud võrrandisse saame

$$y = -\frac{9.8t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + 20$$

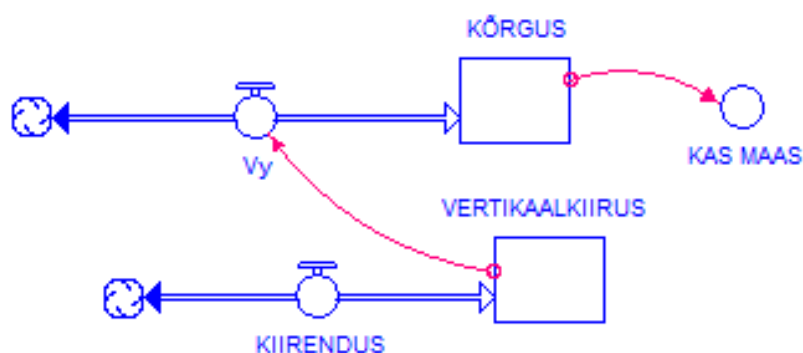
ning sellisel juhul on kivi lennuaeg $t = 4,0625$ sekundit.

Antud ülesande jaoks koostame programmis Stella mudeli, kus põhimuutujad on tähistatud ristkülikutena ja nende tuletised juhtimistena (vt ptk 3). Joonisel 1.3 on kujutatud süsteemi (1.1) põhjal kivi viskamise mudel, kus kasutame kahte põhimuutujat KÕRGUS (y) ja

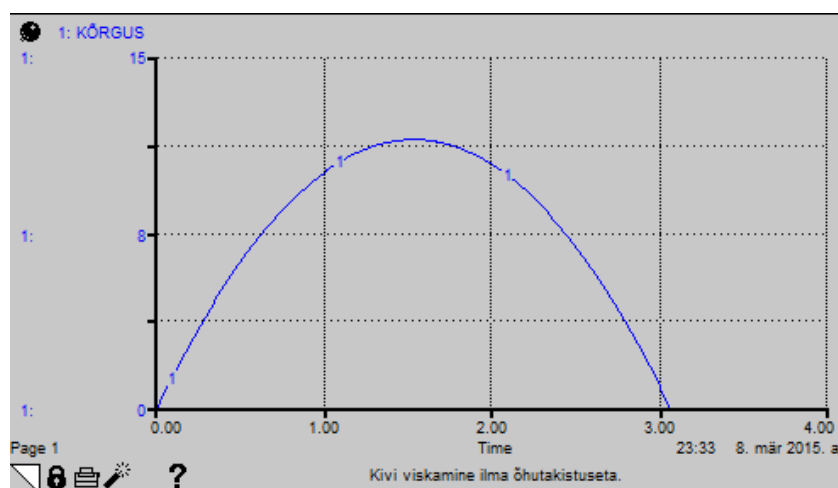
VERTIKAALKIIRUS (\dot{y}), mille juhtimised on vastavalt kiirus V_y (\dot{y}) ja KIIRENDUS (\ddot{y}). Kõigepealt uurime kivi lennukõrgust ning selleks kasutame võrrandeid

$$\begin{cases} \dot{y} = V_y \\ \ddot{y} = -g. \end{cases}$$

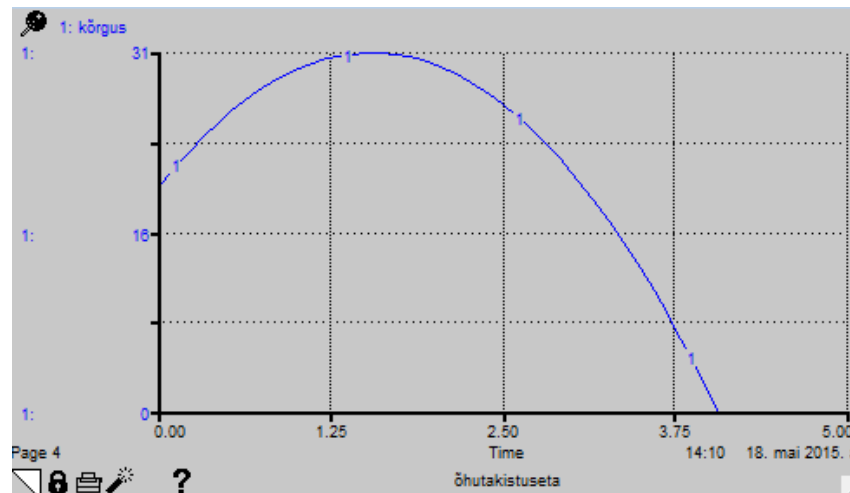
Muutuja KAS MAAS kontrollib, kas keha on jõudnud maapinnale. Tähistame algkõrguse $y(0)$. Kui $y = 0$ ehk kivi on jõudnud maapinnani, lõpetab mudel oma töö kasutades Stella funktsiooni PAUSE. Võtame arvutuste jaoks algkiiruse väärtusega $v_0 = 30$ m/s ning algnurgaks $\alpha = 30^\circ$ (Joonis 1.4-1.6).



Joonis 1.3. Kivi viskamise mudel õhutakistust arvestamata.

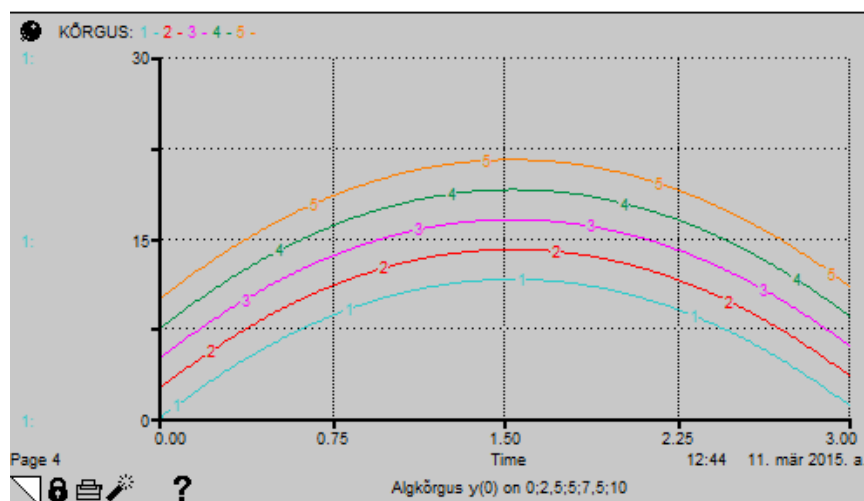


Joonis 1.4. Kivi liikumise trajektoor, kui $y(0) = 0$.



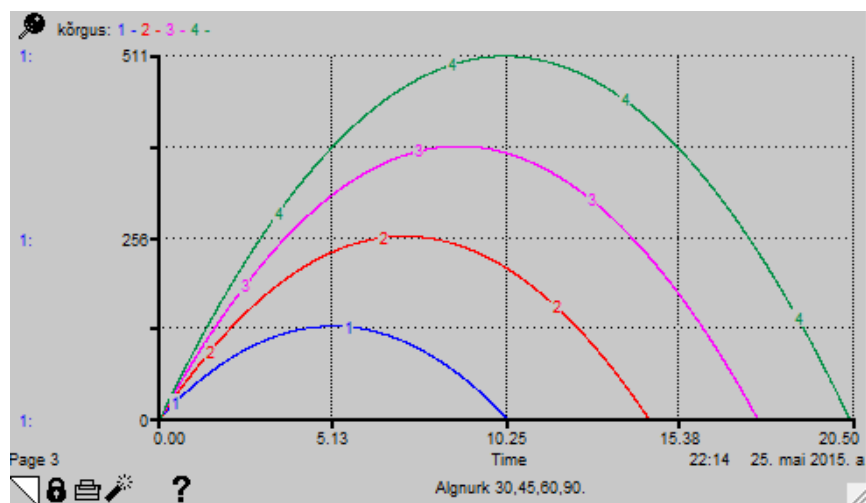
Joonis 1.5. Kivi liikumise trajektoor, kui $y(0) = 20$.

Joonistel 1.4 ja 1.5 on kujutatud mudelis saadud kivi õhus liikumise trajektoori muutumist ajas. Kui jätta õhutakistus arvestamata, siis kukub kivi, mis visatakse algkõrguselt $y(0) = 0$ meetrit, maha ajahetkel $t = 3,07$ sekundit ning kui kivi visata algkõrguselt $y(0) = 20$ meetrit, kukub see maapinnale ajahetkel $t = 4,07$ sekundit. Saadud tulemused on väga lähedased ülesande lahendamisel saadud tulemustega vastavalt $t = 3,0612$ ja $t = 4,0625$ sekundit.



Joonis 1.6 Algkõrguste tundlikkuse analüüs.

Joonisel 1.6 on kujutatud tundlikkuse analüüsi abil lennukõrguse muutumist ajas, kus muudetakse kivi viskamise algkõrgust $y(0) = 0; 2,5; 5; 7,5; 10$ meetrit. Graafikult on näha, et mida kõrgemalt kivi visata, seda kaugemale kivi lendab.



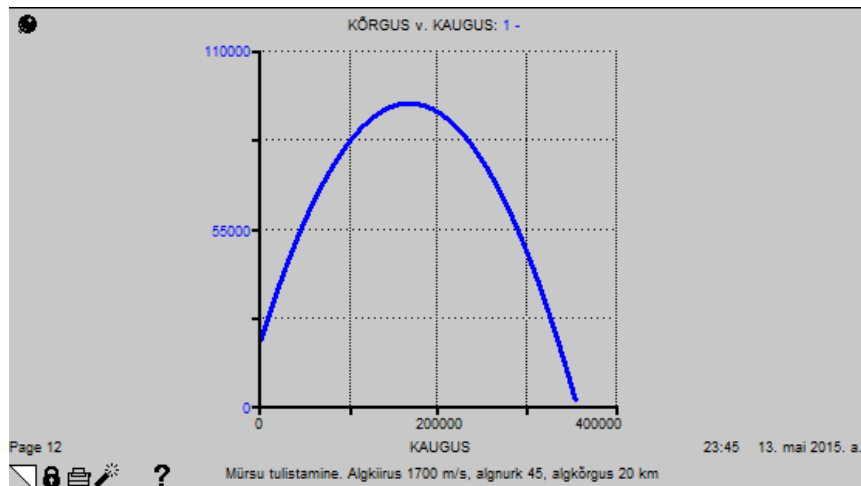
Joonis 1.7. Kivi viskeparaboolid, $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Joonisel 1.7 on kujutatud kivi lennutrajektorid erinevate algnurkade korral, kui algkiirus on $v_0 = 100$ m/s. Näiteks algnurga $\alpha = 45^\circ$ korral saame kivi maksimaalseks kõrguseks 255,10 meetrit ning lennuajaks $t = 14,44$ sekundit (Tabel 1.1).

Tabel 1.1. Kivi viskamise ülesanne õhutakistuseta.

Algnurk (kraadid)	Maksimaalne kõrgus (meetrid)	Lennuaeg (sekundid)
30	127,55	10,21
45	255,10	14,44
60	382,66	17,68
90	510,2	20,41

Kasutame seda mudelit, et leida Teises maailmasõjas kasutatud Saksa mürsu V2 lennutrajektor. Kirjanduse põhjal on teada, et kui mürsk tulistada välja algkõrguselt $y(0) = 20$ km, algkiirusega 1700 m/s ja ligikaudu 45° nurga all, siis mürsk lendab ligikaudu 75 km kõrgusele ja 300 km kaugusele ning selleks kulub tal aega umbes 245 sekundit. Joonisel 1.8 on kujutatud mürsu liikumise trajektor. Stella mudeli põhjal saame tulemuseks, et mürsk lendab 312,541 km kaugusele, maksimaalne kõrgus on 73,724 km ning lennuaeg $t = 260$ sekundit.



Joonis 1.8. Mürsu V2 liikumise trajektoor.

Kasutades eelnevalt nimetatud algtingimusi saame võrrandi

$$y = -\frac{9.8t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + h$$

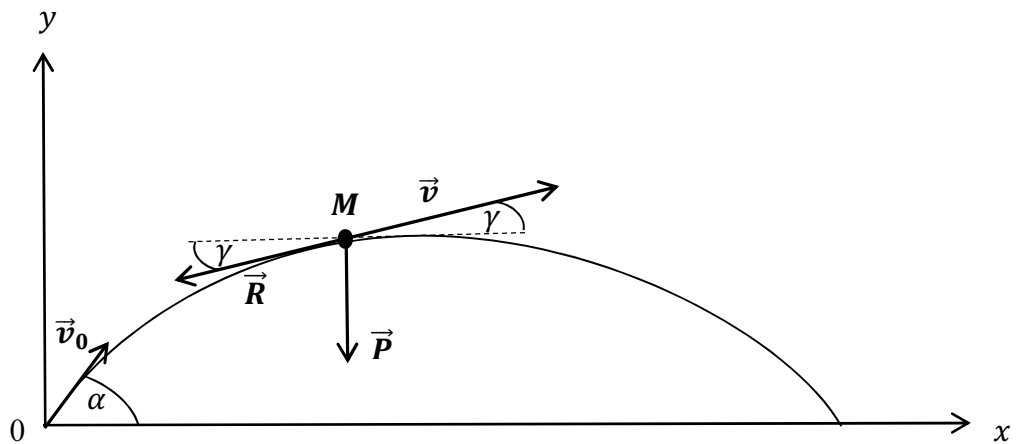
põhjal mürsu lennuajaks $t = 260,94$ sekundit, mis on üsna lähedane Stellaga saadud lahendile.

1.2. Kivi viskamise ülesanne arvestades õhutakistust.

Antud ülesande lahendamiseks on kasutatud K. Kenki ja J. Kirsi õpiku „Mehaanika alused“ III osa [1].

Keha massiga m visatakse üles horisontaali suhtes nurga α all algkiirusega v_0 . Õhutakistusjõud, mis on vastassuunaline kivi kiirusvektoriga, on võrdeline kiirusega, kus võrdeteguriks on b . Eesmärgiks on leida keha liikumise võrrand.

Olgu õhutakistus \vec{R} ning takistusjõu ja horisontaalsihi vaheline nurk γ .



Joonis 1.9. Viskeparabool ([1]).

Kiirusvektor on suunatud mööda trajektoori puutujat vaadeldavas punktis liikumise suunas, õhutakistuse vektor on aga suunatud vastupidises suunas (Joonis 1.9).

Leiame põhivõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{cases}$$

jaoks mõjuvate jõudude projektsioonid koordinaattelgede suhtes

$$\begin{cases} F_x = -R \cos \gamma \\ F_y = -P - R \sin \gamma \end{cases}$$

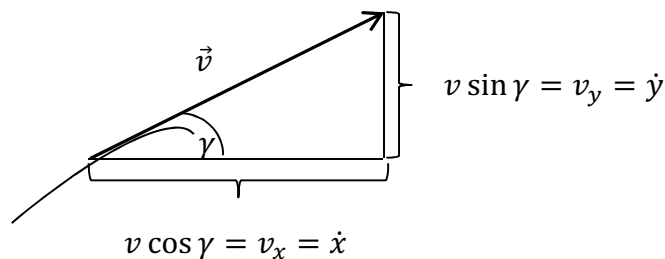
ning arvestame, et $\vec{P} = m\vec{g}$ ja $\vec{R} = b\vec{v}$. Siis

$$\begin{cases} F_x = -bv \cos \gamma \\ F_y = -mg - bv \sin \gamma. \end{cases} \quad (1.5)$$

Seega liikumisvõrrandid on

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m} v \cos \gamma = 0 \\ \ddot{y} + \frac{b}{m} v \sin \gamma = -g. \end{cases} \quad (1.6)$$

Saime kaks võrrandit, milles x , y , v ja γ on tundmatud funktsioonid ning nende diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks tuleb nendest kaks elimineerida. Teisenduste abil saame elimineerida funktsioonid v ja γ . Projekteerime trajektoori mingis punktis asuva kiirusvektori \vec{v} x - ja y -telgedele (Joonis 1.10).



Joonis 1.10. Kiirusvektor ([1]).

Tulemusena saame projektsioonid $v_x = v \cos \gamma$ ja $v_y = v \sin \gamma$.

Kuna $v_x = \dot{x}$ ja $v_y = \dot{y}$, siis süsteem (1.6) on esitatav kujul

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} = -g. \end{cases} \quad (1.7)$$

Võrrandite lahendamiseks on kasutanud A. Pedase ja G. Vainikko õpikut „Harilikud diferentsiaalvõrrandid“ [4].

Saadud süsteemi (1.7) esimese võrrandi lahendamiseks moodustame temale vastava karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda = 0.$$

Antud karakteristliku võrrandi lahendamisel

$$\lambda \left(\lambda + \frac{b}{m} \right) = 0$$

saame karakteristlikud juured

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{b}{m}.$$

Kuna lahendid on reaalsed ja erinevad, siis saame diferentsiaalvõrrandi (1.7) esimese võrrandi jaoks lahendite fundamentaalsüsteemi

$$x_1 = e^{0t}, x_2 = e^{-\frac{b}{m}t}.$$

Seega üldlahend on

$$x = C_1 + C_2 e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (1.8)$$

Süsteemi (1.7) teise võrrandi lahendamiseks lahendame kõigepealt vastava homogeenise diferentsiaalvõrrandi, mille karakteristliku võrrandi

$$\lambda \left(\lambda + \frac{b}{m} \right) = 0$$

lahendamisel saame lahendite fundamentaalsüsteemi

$$y_1 = e^{0t}, y_2 = e^{-\frac{b}{m}t}.$$

Seega (1.7) teise võrrandi üldlahend on esitatav kujul

$$y = C_3 + C_4 e^{-\frac{bt}{m}} + y_*,$$

kus y_* on mittehomogeense võrrandi mingi erilahend.

Otsime mittehomogeense võrrandi

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} = -g$$

erilahendit kujul

$$y_* = C_* t.$$

Diferentseerime

$$\dot{y}_* = C_*, \ddot{y}_* = 0.$$

ja asendame saadud tulemused süsteemi (1.7) teise võrrandisse

$$0 + \frac{b}{m}C_* = -g.$$

Avaldades

$$C_* = -\frac{gm}{b},$$

saame y_* kujul

$$y_* = -\frac{gmt}{b}.$$

Seega (1.7) teise võrrandi üldlahend on

$$y = C_3 + C_4 e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{gmt}{b}. \quad (1.9)$$

Määrame integreerimiskonstandid C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 vastavalt algtingimustele

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.10)$$

Kasutades seoseid (1.8) ja (1.9) leiame tingimuste (1.10) rakendamise jaoks funktsioonide $x(t)$ ja $y(t)$ tuletised aja t järgi

$$\dot{x} = -C_2 \frac{b}{m} e^{-\frac{bt}{m}}, \quad \dot{y} = -\frac{mg}{b} - C_4 \frac{b}{m} e^{-\frac{bt}{m}}. \quad (1.11)$$

Tulemuseks saame integreerimiskonstandid

$$\begin{aligned}
C_1 &= -C_2, \\
C_3 &= -C_4, \\
C_2 &= -\frac{mv_0}{b} \cos \alpha, \\
C_4 &= -\frac{m}{b} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{b} \right).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Vastavalt saadud integreerimiskonstantidele (1.12) avalduvad (1.8) ja (1.9) kujul

$$x = \frac{mv_0}{b} \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right), \tag{1.13}$$

$$y = -\frac{mgt}{b} + \frac{m}{b^2} (bv_0 \sin \alpha + mg) \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right). \tag{1.14}$$

Tähistades algkõrguse $y(0) = h$, saame võrrandi (1.14) kujul

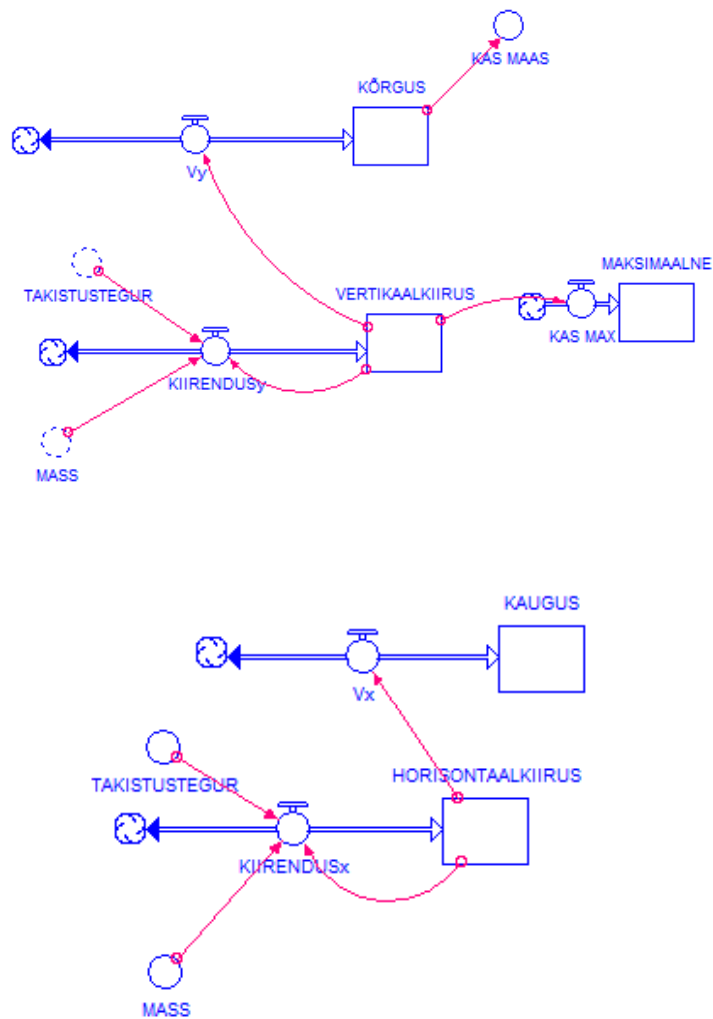
$$y = -\frac{mgt}{b} + \frac{m}{b^2} (bv_0 \sin \alpha + mg) \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right) + h. \tag{1.15}$$

Antud ülesande jaoks koostame mudeli programmiga Stella, kus süsteemi juhtimiste jaoks kasutame võrrandisüsteemist (1.7) lähtuvalt 4 põhimuutujat

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \ddot{x} = -\frac{b}{m} v_x \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y} = v_y \\ \ddot{y} = -\frac{b}{m} v_y - g. \end{cases}$$

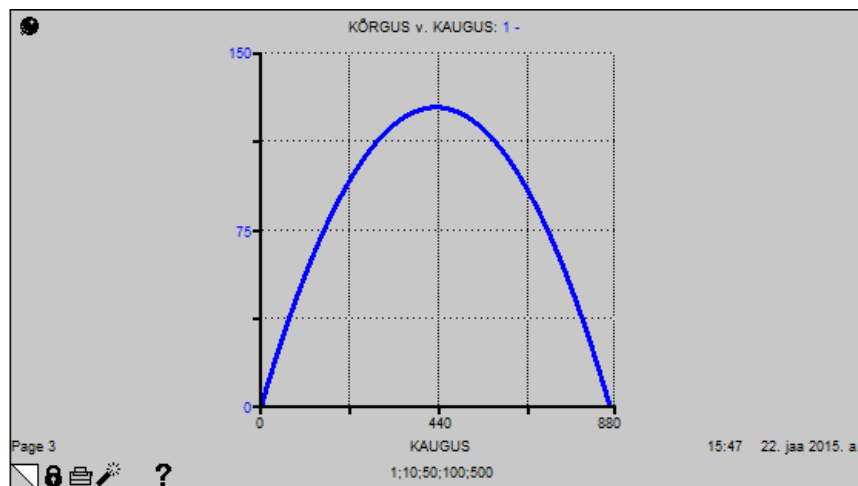
Joonis 1.11 kirjeldab kivi viskamise mudelit, kus arvestatakse õhutakistust. Takistustegur b on mudelis muutuja TAKISTUSTEGUR. Võrreldes mudeliga, mida on kujutatud joonisel 1.3 oleme lisanud põhimuutujad KAUGUS (x) ja HORISONTAALKIIRUS (\dot{x}), mille juhtimised on vastavalt kiirus V_x (\dot{x}) ja KIIRENDUSx (\ddot{x}).

Põhimuutuja MAKSIMAALNE leiab maksimaalse kõrguse, mille kivi oma liikumisel saavutab. Maksimaalse kõrgus leidmiseks integreeritakse kiirust ning arvestatakse, et $v_y = 0$ korral on kivi kõrgus maksimaalne, millest alates hakkab see vähenema.

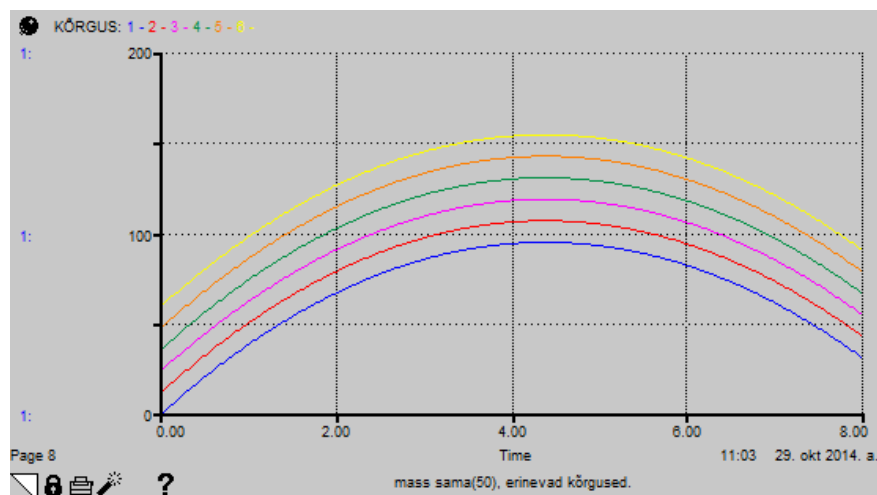


Joonis 1.11. Kivi viskamise mudel arvestades õhutakistust.

Antud mudelis kasutame takistusteguri väärtust 0,2 ja massi $m = 100$ kg, algkiirust $v_0 = 100$ m/s ning algnurka $\alpha = 30^\circ$. Mudeli järgi saame Stella abil kivi lennukauguseks 871,85 meetrit, maksimaalseks kõrguseks 126,69 meetrit (Joonis 1.12) ning lennuajaks $t = 10,17$ sekundit, mis on kooskõlas (1.15) lahendamisel saadud tulemusega $t = 10,1627$ sekundit.

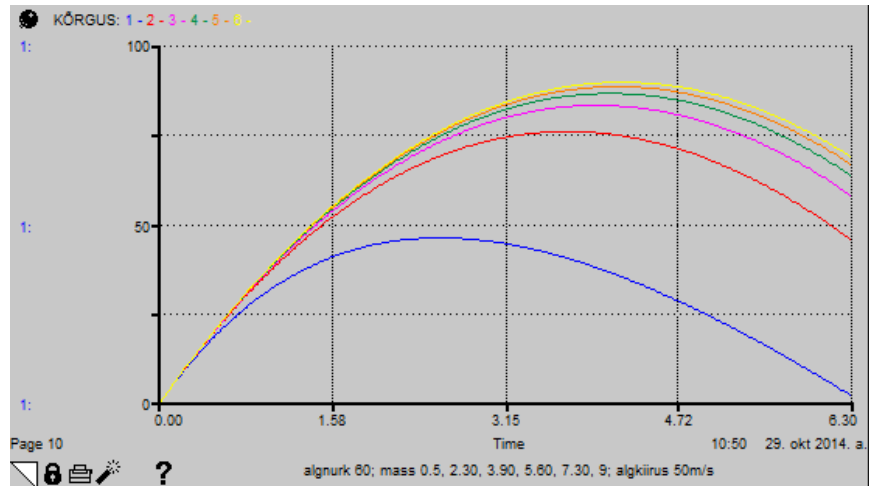


Joonis 1.12. Kivi viskeparabool.



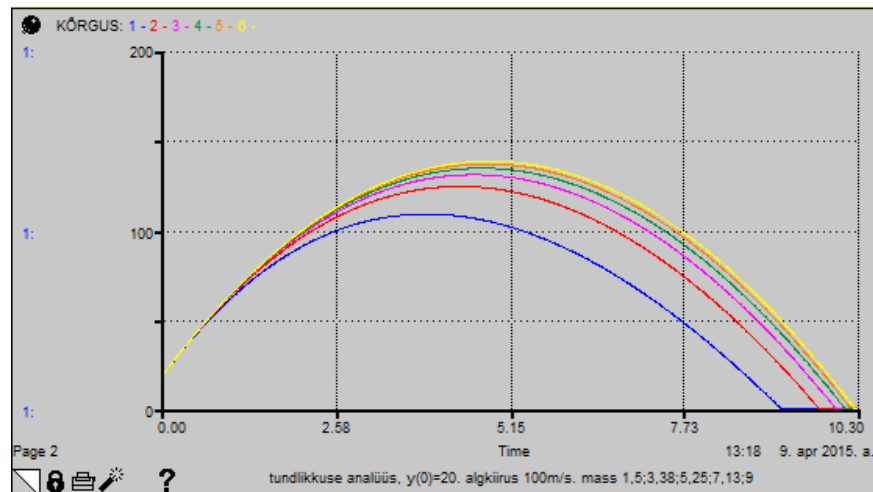
Joonis 1.13. Algkõrguste tundlikkuse analüüs.

Joonisel 1.13 on näidatud tundlikkuse analüüsi abil lennukõrguse muutumist ajas, kus muudetakse 50 kg massiga kivi viskamise algkõrgust $y(0) = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ meetrit. Jooniselt on näha, et mida kõrgemalt sama massiga kivi visata, seda kaugemale kivi lendab.



Joonis 1.14. Tundlikkuse analüüs, $y(0) = 0$.

Joonisel 1.14 ja 1.15 on näidatud erinevate masside 0,5; 2,3; 3,9; 5,6; 7,3; 9 kg kivi lennutrajektoore, kui viskamise algnurk $\alpha = 60^\circ$ ja kiirus on $v_0 = 50$ m/s. Joonistelt on näha, et mida suurem on kivi mass, seda kaugemale kivi lendab.



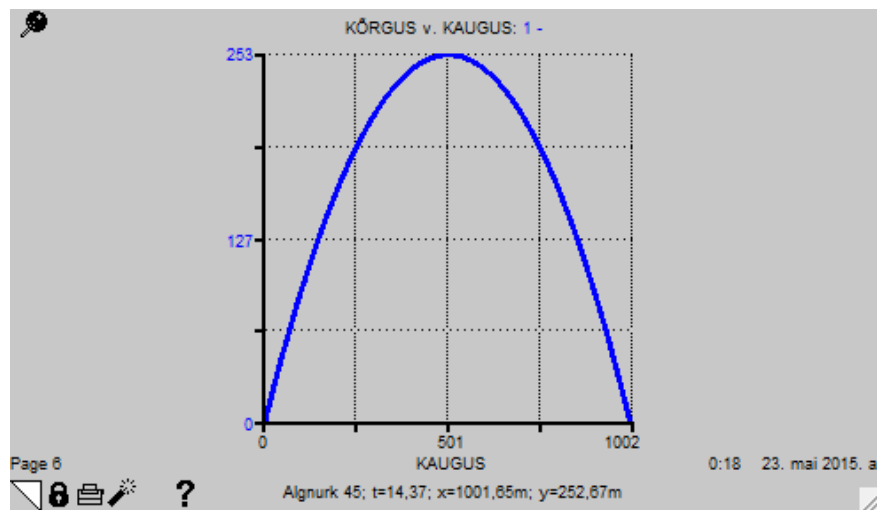
Joonis 1.15. Tundlikkuse analüüs, $y(0) = 20$.

Tabelis 1.2 on esitatud erinevate algnurkade korral kivi lennuaeg, maksimaalne lennukaugus ja -kõrgus. Kivi lendab algkiiruse $v_0 = 100$ m/s, massi $m = 100$ kg ja takistusteguri $b = 0,2$ korral kõige kaugemale, kui algnurgaks on $\alpha = 45^\circ$.

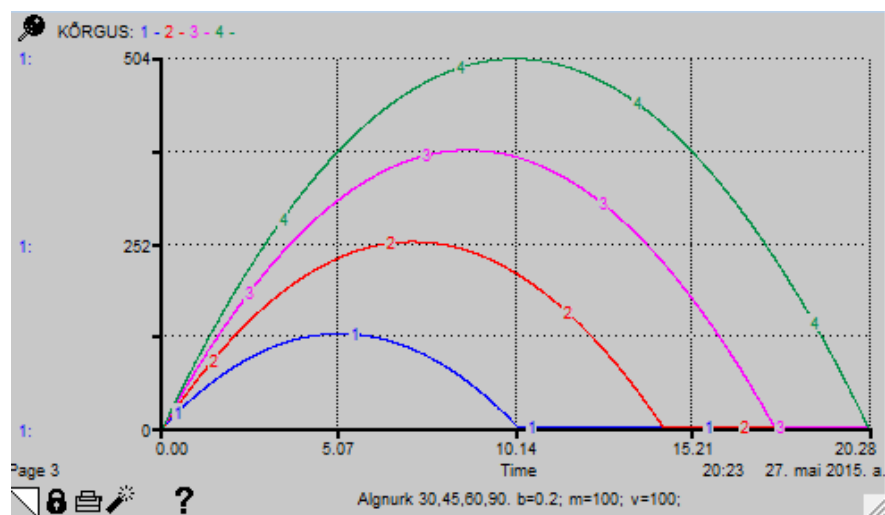
Tabel 1.2. Kivi viskamise ülesanne õhutakistusega.

Algnurk (kraadid)	Lennuaeg (sekundid)	Maksimaalne lennukaugus (meetrid)	Maksimaalne lennukõrgus (meetrid)
30	10,17	871,85	126,69
40	13,07	988,25	208,98
44,9	14,34	1001,331	251,796
45	14,37	1001,65	252,67
45,1	14,39	1001,272	253,55
50	15,56	984,775	296,316
60	17,48	844,145	373,868
70	19,06	639,622	444,843
75	19,47	484,798	463,874
80	19,97	339,942	448,288
89,9	20,28	3,469	503,366
90	20,28	0	503,367

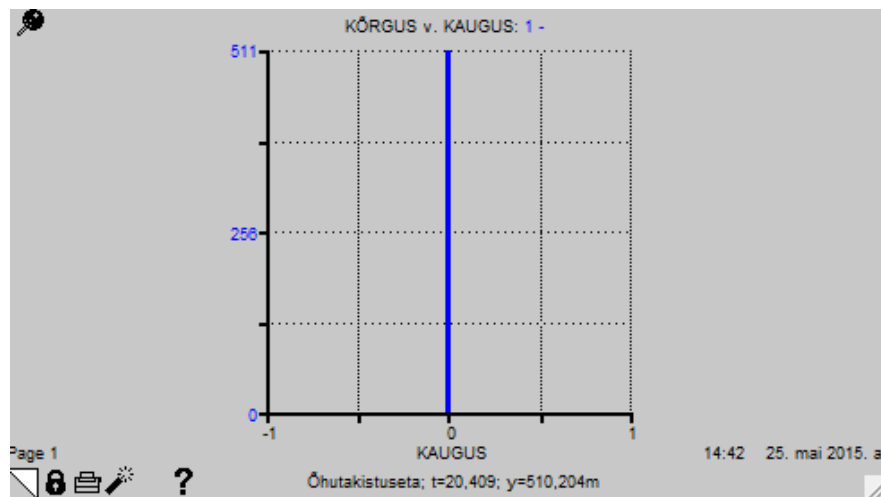
Massi $m = 100$ kg korral saame kivi lennukauguseks 1001,65 meetrit, maksimaalseks kõrguseks 252,67 meetrit ning lennuajaks $t = 14,37$ sekundit (Joonis 1.16). Algnurga $\alpha = 30^\circ$ korral on kivi lennukauguseks 871,85 meetrit, maksimaalseks kõrguseks 126,69 meetrit ning lennuajaks $t = 10,17$ sekundit. Nurga $\alpha = 60^\circ$ korral on vastavad tulemused 844,145 meetrit, 373,868 meetrit ning lennuajaks $t = 17,48$ sekundit (Joonis 1.17).



Joonis 1.16. Kivi lennutrajektoor, $\alpha = 45^\circ$.



Joonis 1.17. Kivi lennutrajektoolid, $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.



Joonis 1.18. Kivi liikumistrajektor, $\alpha = 90^\circ$.

Kui visata kivi otse üles ehk $\alpha = 90^\circ$ ja õhutakistustegur $b = 0$, siis on ka kivi maksimaalseks kõrguseks kõige kõrgem punkt, mida tal on võimalik nende tingimuste juures saavutada (Joonis 1.18). Sel juhul on kivi maksimaalseks kõrguseks 510,204 meetrit ning lennuajaks $t = 20,409$ sekundit.

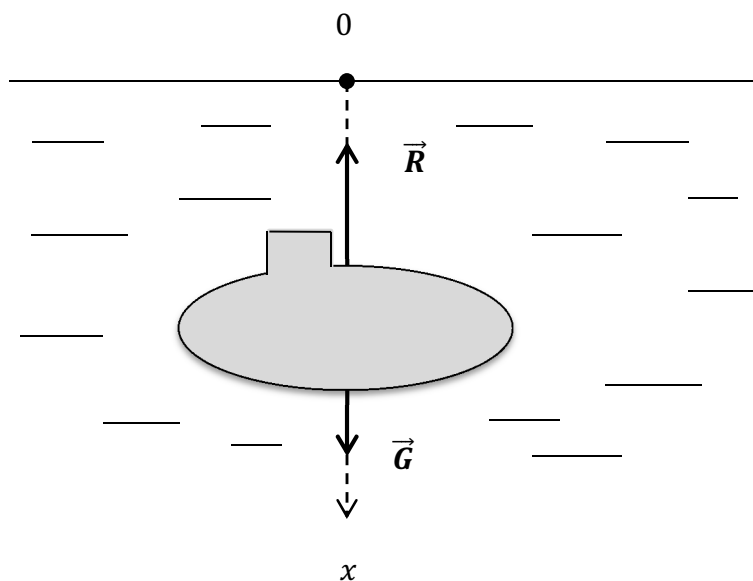
Võrdleme nüüd peatükkides 1.1 ja 1.2 kirjeldatud mudelitest saadavaid tulemusi õhutakistuseta ning õhutakistusega kivi viskamise juhul. Viskamise algnurga $\alpha = 30^\circ$, massi $m = 100$ kg, algkõrguse $y(0) = 0$ meetrit ja algkiiruse $v_0 = 30$ m/s korral on õhutakistust arvestamata kivi lennuajaks $t = 3,0612$ sekundit ning õhutakistust arvestades kestab lend $t = 3,056$ sekundit.

2. Allveelaeva sukeldumise ülesanne

Antud ülesande jaoks on kasutatud J. Kirsi konspekti „Loenguid ja harjutusi dünaamikast“ [5].

Allveelaev hakkab sukelduma ilma algkiirusega ning laskub sealjuures translatoorselt. Laeva massiks on M . Sukeldumisel laevale mõjuvad jõud on konstantne jõud \vec{G} ning keskkonna takistusjõud \vec{R} , mis on võrdeline kiirusega, kus võrdetegur on kS (Joonis 2.1).

Leiame allveelaeva sukeldumise võrrandi ja maksimaalse sukeldumiskiiruse.



Joonis 2.1. Allveelaeva sukeldumine.

Vaatame antud ülesandes allveelaeva sukeldumist ehk tema laskumist x -telje sihis suunaga alla. Seega on tegemist ühedimensionaalse ülesandega, kus põhivõrrand avaldub kujul

$$m\ddot{x} = F_x. \quad (2.1)$$

Leides võrrandis (2.1) x -teljele mõjuvate jõudude (Joonis 2.1) projektsioonide summa, saame

$$F_x = G - R.$$

Kuna takistusjõud on võrdeline kiirusega, kus võrdetegur on kS , siis

$$F_x = G - kSv. \quad (2.2)$$

Asendame suurused M ja F_x põhivõrrandisse (2.1) ja saame

$$M\ddot{x} = G - kSv.$$

Esitame antud võrrandi kujul

$$\ddot{x} + \frac{kSv}{M} = \frac{G}{M}. \quad (2.3)$$

Kuna $v = \dot{x}$, siis võrrand (2.3) avaldub kujul

$$\ddot{x} + \frac{kS}{M} \dot{x} = \frac{G}{M}. \quad (2.4)$$

Antud võrrandile vastava homogeenise diferentsiaalvõrrandi

$$\ddot{x} + \frac{kS}{M} \dot{x} = 0$$

lahendamiseks moodustame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 + \frac{kS}{M} \lambda = 0,$$

mille lahendamisel

$$\lambda \left(\lambda + \frac{kS}{M} \right) = 0$$

saame lahendid

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{kS}{M}.$$

Kuna lahendid on erinevad ja reaalsed, siis homogeenne diferentsiaalvõrrandi lahendite fundamentaalsüsteem on

$$x_1 = e^{0t}, x_2 = e^{-\frac{kSt}{M}}.$$

Seega võrrandi (2.4) üldlahend on

$$x = C_1 + C_2 e^{-\frac{kSt}{M}} + x_*, \quad (2.5)$$

kus x_* on mittehomogeenne võrrandi erilahend, mida hakkame otsima kujul

$$x_* = C_* t. \quad (2.6)$$

Diferentseerides aja t järgi

$$\dot{x}_* = C_*, \ddot{x}_* = 0$$

ning asendades saadud tulemused võrrandisse (2.4)

$$0 + \frac{kS}{M} C_* = \frac{G}{M}$$

avaldame C_*

$$C_* = \frac{G}{kS}.$$

Järelikult erilahend (2.6) on

$$x_* = \frac{Gt}{kS}$$

ning võrrandi üldlahend (2.5) on seega

$$x = C_1 + C_2 e^{-\frac{kSt}{M}} + \frac{Gt}{kS}. \quad (2.7)$$

Integreerimiskonstantide C_1 ja C_2 leidmisel arvestame võrrandi (2.7) jaoks algtingimusi

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0. \quad (2.8)$$

Leiame funktsiooni $x(t)$ tuletise aja t järgi

$$\dot{x} = -\frac{kS}{M} C_2 e^{-\frac{kSt}{M}} + \frac{G}{kS}. \quad (2.9)$$

Rakendades tingimusi (2.8) võrrandite (2.7) ja (2.9) korral saame vastavalt võrrandid

$$0 = C_1 + C_2,$$

$$0 = -\frac{kS}{M} C_2 + \frac{G}{kS}.$$

Lahendades saadud süsteemi leiame konstandid

$$C_1 = -\frac{GM}{k^2 S^2},$$

$$C_2 = \frac{GM}{k^2 S^2},$$

mille asendamisel võrrandisse (2.5) saame allveelaeva sukeldumisvõrrandi

$$x = \frac{Gt}{kS} - \frac{GM}{k^2 S^2} \left(1 - e^{-\frac{kSt}{M}}\right). \quad (2.10)$$

Leiame allveelaeva sukeldumiskiiruse

$$v = \dot{x} = \frac{G}{kS} - \frac{G}{kS} e^{-\frac{kSt}{M}}, \quad (2.11)$$

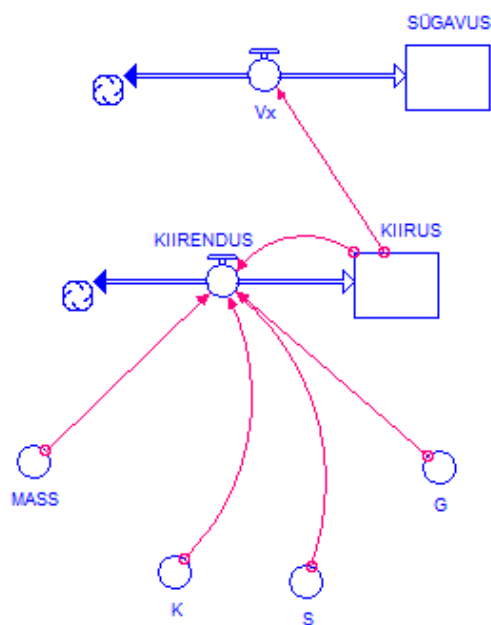
mille põhjal allveelaeva maksimaalne sukeldumiskiirus on leitav kujul

$$v_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} v = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{G}{kS} - \frac{G}{kS} e^{-\frac{kSt}{M}} \right) = \frac{G}{kS}.$$

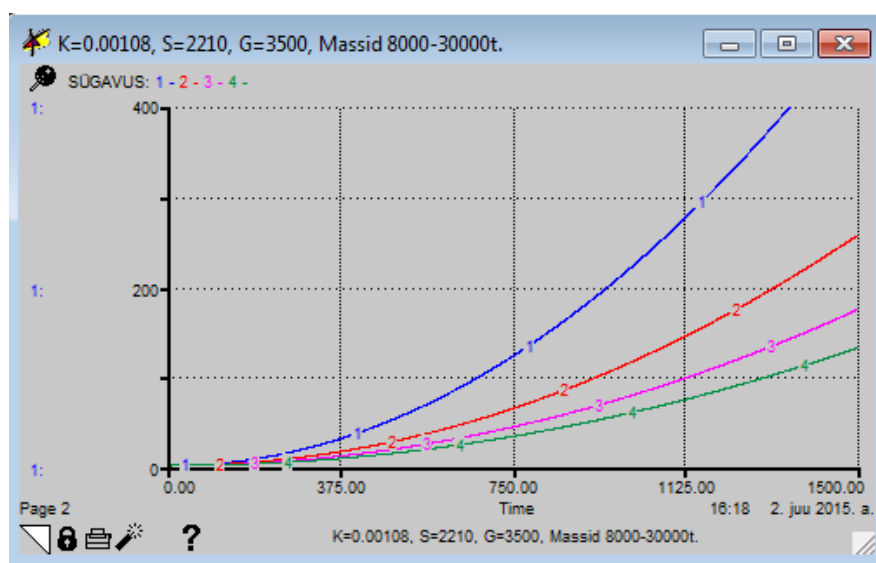
Mudeli koostamiseks kasutame võrrandist (2.4) kahte põhimuutujat SÜGAVUS (x) ja KIIRUS (\dot{x}), mille juhtimised on vastavalt kiirus Vx (\dot{x}) ja KIIRENDUS (\ddot{x}) järgmiselt:

$$\begin{cases} \dot{x} = Vx \\ \ddot{x} = \frac{G}{M} - \left(\frac{KS}{M}\right) Vx. \end{cases}$$

Antud mudeli skeem on kujutatud joonisel 2.2.



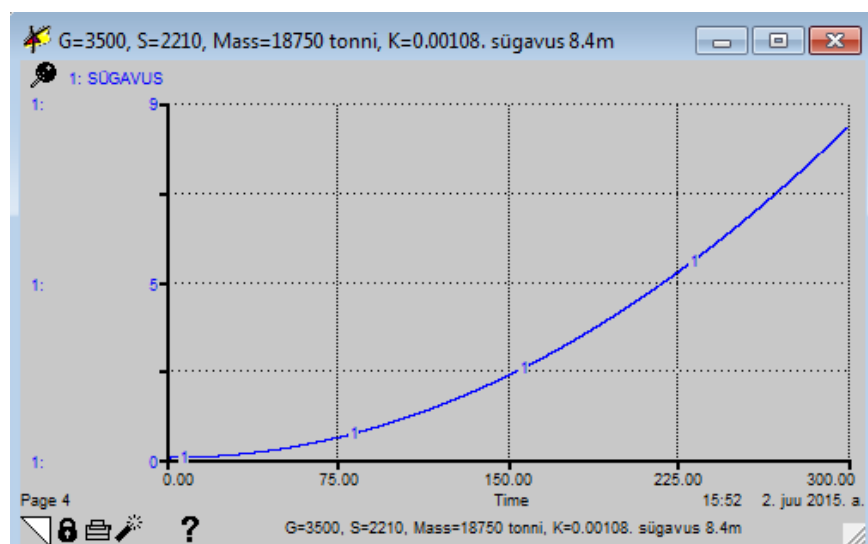
Joonis 2.2. Allveelaeva sukeldumise mudel.



Joonis 2.3. Allveelaeva sukeldumise tundlikkuse analüüs.

Joonisel 2.3 on kujutatud sukeldumissügavuse tundlikkuse analüüs laevamasside 8000, 15000, 23000 ja 30000 tonni korral. Mudelis on laeva pikkuseks 170 meetrit ning laiuseks 13 meetrit, takistustegur $k = 0,00108$, $G = 3500$ N. Graafikult on näha, et mida raskem on allveelaev, seda kauem läheb tal aega sukeldumiseks.

Järgnevalt kasutame antud mudelit Ohio tüüpi allveelaeva korral [6]. Ohio tüüpi allveelaev kaalub umbes 18 750 tonni. Sellise allveelaeva pikkuseks on 170 meetrit ning laiuks 13 meetrit. Ohio tüüpi allveelaeval läheb otse alla laskudes periskoobi sügavuse (8-9 meetrit) saavutamiseks umbes 5 minutit (Joonis 2.4).

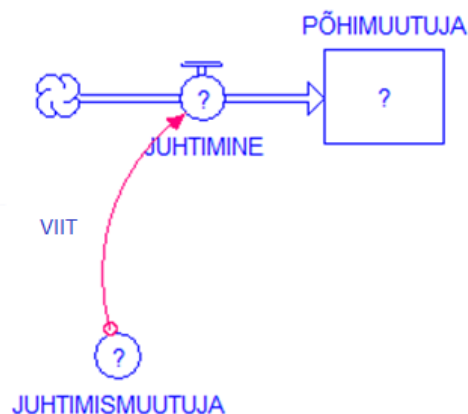


Joonis 2.4. Ohio tüüpi allveelaeva sukeldumine periskoobi sügavusele.

3. Programmi Stella tutvustus

Modelleerimisprogrammi Stella abil saab koostada palju erinevaid mudeleid. Mudelid aitavad mõista reaalelulisi probleeme, jäljendades tegelikke protsesse lihtsustatult. On kahte põhilist tüüpi mudeleid: staatiline mudel, mis kirjeldab mingit nähtust antud ajahetkel ning dünaamiline, mis kirjeldab muutusi reaalses või simuleeritud ajas. Antud bakalaureusetöös on kasutatud dünaamilisi mudeleid. Kui mudel on simuleeritud arvutiga, siis iga mudeli element on määratud algtingimustega ning programm leiab vastused probleemidele vastavalt seostele, mis on elementide vahel määratud. [7]

Stella realiseerib antud töös koostatud mudelid diferentsiaalvõrranditena ning lahendab neid numbriliste meetodite abil. Selleks on valida kolme meetodi vahel: Euleri meetod, Runge-Kutta 2.järku meetod ning Runge-Kutta 4.järku meetod. Iga meetodi valimise korral tuleb mudelile valida ka ajasamm. Ajasamm (dt) sõltub meetodi valikust. See võib olla nii 0,005 kui ka 1. Ajasammu pikkus määrab ära, kui tiheidalt Stella mudelis numbriline integratsioon toimub. Need valikud saab teha menüü *Run* alammenüüst *Run Specs*. [2]



Joonis 3.1. Stella põhielemendid.

Modelleerimisprogrammi Stella neli peamist elementi on kujutatud joonisel 3.1. Põhimuutujad (*Stock*) väljendavad protsessi kõige olulisemaid näitajaid ning neid

kujutatakse riskülikutena. Põhimuutuja väärtuseks pannakse mudelis tema algväärtus (väärtus ajahetkel $t = 0$). Põhimuutuja on seega otsitav väärtus, mis muutub ajas. Juhtimised (*Flow*) on põhimuutujate tuletised. Olenevalt mudelist võivad juhtimised olla ühepoolised (põhimuutuja suurenemine (*inflow*) või vähenemine (*outflow*) simulatsiooni käigus) või ka mõlemapoolsed (*biflow*). Mõlemapoolse juhtimise korral näitab valget värvi nool liikumise põhisuunda. Juhtimised kirjeldavad nendega seotud põhimuutujate muutumist. Kui mudel töötab ajas, siis muudavad juhtimised iga ajasammu järel põhimuutujaid. Viidad (*Connector*) näitavad seoseid põhimuutujate, juhtimiste ning juhtimismuutujate vahel. Lisaks sellele on nad vajalikud võrrandite sisestamisel. Juhtimismuutujateks (*Converter*) võivad olla erinevad parameetrid ja konstandid, mida juhtimiste ja põhimuutujate vahelistes seostes kasutatakse. [7]

Mudeli koostamist alustatakse põhimuutujate ja juhtimiste paikapanekust, seejärel lisatakse vajalikud juhtimismuutujad ja näidatakse muutujatevahelised seosed viitadega. Nagu on näha jooniselt 3.1, siis esialgu on iga muutuja juures küsimärk. Küsimärk tähendab, et mudeli elemendile ei ole sisestatud väärtust või on sisestatud valemis kasutatud muutujaid, mida ei ole selle elemendiga ühendatud. Kui mudel sisaldab kasvõi ühtainust küsimärki, ei saa mudelit käivitada.

Mudeli koostamisel peab lähtuma sellest, et mudeli skeem oleks lihtsalt jälgitav. Kui tekib olukord, kus vajalike muutujate viitadega ühendamise muudab skeemi halvasti jälgitavaks, kasutatakse Stellas vastava muutuja koopiat, milleks on vaim (*Ghost*). Muutuja koopia on näha mudeli skeemis katkendliku joonega (vt Joonis 1.11).

Stella avaldistes saab kasutada lisaks põhilistele elementaarfunktsioonidele ka mudeli tööaega (*time*), ajasammu (*dt*), mudeli töö peatamist (*pause*), tingimuslauset (*if-then-else*) ja palju teisi funktsioone.

Samuti saab Stellas teha mudeli tundlikkuse analüüsi, mis võimaldab uurida ühe parameetri erinevate väärtuste kasutamise korral saadavaid tulemusi ja kujutada neid graafikul või tabelis.

Kokkuvõte

Käesolev bakalaureusetöö on peamiselt referatiivne. Vastavad dünaamika ülesanded on võetud õpikutest, milles esitatud lahenduskäigud on iseseisvalt läbi tehtud ja antud töös põhjalikumalt esitatud. Iseseisva tööna on koostatud mudelid vastavatele diferentsiaalvõrrandite süsteemidele programmis Stella. Tundlikkuse analüüsid on tehtud erinevate tingimuste korral ning saadud tulemusi on võrreldud analüütiliselt leitud lahenditega. Lisaks on otsitud kirjandusest sarnaseid ülesandeid ja reaalseid näiteid, mille põhjal on tehtud võrdlusi töös esitatud mudelite tulemusetega.

Antud töös on lahendatud kahte ülesannet: kivi viskamise (õhutakistust arvestamata ja arvestades) ja allveelaeva sukeldumise ülesannet. Mõlemal juhul on antud ülesande püstitus, põhivalemid koos lahenduskäikudega, mudelite kirjeldused ning tulemused, mis on esitatud Stellaga saadud graafikute ja tabelitena. Mudelite koostamiseks on kasutatud diferentsiaalvõrrandeid, mida programmis Stella on lahendatud numbriliselt.

Kivi viskamise ülesande lahendamine õhutakistust arvestamata on lihtsam kui õhutakistust arvestades. Kui võrrelda õhutakistusega ja õhutakistuseta ülesannet, kus algtingimused olid samad, siis lennuaeg tuli õhutakistust arvestades lühem kui õhutakistuseta ülesande korral, kuna takistusjõudu kivile ei mõjunud. Erinevate kivi masside korral võib öelda, et mida suurem on kivi mass, seda kaugemale kivi maha kukub. Erinevate algnurkade korral saadi tulemusteks, et kõige kaugemale lendab kivi $\alpha = 45^\circ$ korral ning kõige kõrgemale kui algnurk $\alpha = 90^\circ$.

Allveelaeva sukeldumise ülesandes on esitatud võrrandid allveelaeva sukeldumise kiiruse ja maksimaalse kiiruse leidmiseks. Ühe näitena on mudelis läbi tehtud Ohio tüüpi allveelaeva sukeldumise ülesanne. Saadud tulemused tulid üsna lähedased kirjanduses mainitule.

Kasutatud kirjandus

- [1] K. Kenk, J. Kirs, *Mehaanika alused III osa*, TTÜ Kirjastus, Tallinn, 2013.
- [2] R. Palmer, *Basic Introduction to STELLA®II*
<http://www.ce.washington.edu/~palmer/classes/CEWA557/Readings/STELLAIntro.pdf>
(viimati vaadatud 02.06.2015)
- [3] Ü. Lepik, L. Roots, *Teoreetiline mehaanika*, Valgus, Tallinn, 1971.
- [4] A. Pedas, G. Vainikko, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2011.
- [5] J. Kirs, *Teoreetiline mehaanika III. Loenguid ja harjutusi dünaamikast* [Võrguõpik], Tallinn, 2004
<http://www.mh.ttu.ee/jkirs/varu/Dynaam/Dynaam2.pdf> (viimati vaadatud 02.06.15)
- [6] Fleet Ballistic Missile Submarines – SSBN, 2014
http://www.navy.mil/navydata/fact_display.asp?cid=4100&tid=200&ct=4 (viimati vaadatud 02.06.2015)
- [7] B. Hannon, M. Ruth, *Dynamic Modeling*, Springer-Verlag, New-York, 1994.

Lisad

Lisa 1. Kivi viskamise programmikood Stellas õhutakistust arvestamata.

$K\ddot{O}RGUS(t) = K\ddot{O}RGUS(t-dt) + (V_y) * dt$

INIT $K\ddot{O}RGUS = 20$

INFLOWS:

$V_y = \text{VERTIKAALKIIRUS}$

$\text{VERTIKAALKIIRUS}(t) = \text{VERTIKAALKIIRUS}(t-dt) + (KIIRENDUS) * dt$

INIT $\text{VERTIKAALKIIRUS} = 15$

INFLOWS:

$KIIRENDUS = -9.8$

$AEG = \text{TIME}$

$KAS_MAAS = \text{IF } (K\ddot{O}RGUS < 0) \text{ AND } (\text{TIME} > 0) \text{ THEN PAUSE ELSE } 0$

Lisa 2. Kivi viskamise programmikood Stellas arvestades õhutakistust.

$\text{HORISONTAALKIIRUS}(t) = \text{HORISONTAALKIIRUS}(t-dt) + (KIIRENDUS_x) * dt$

INIT $\text{HORISONTAALKIIRUS} = \text{ALGKIIRUS} * \cos(\text{ALGNURK})$

INFLOWS:

$KIIRENDUS_x = -\text{TAKISTUSTEGUR} * \text{HORISONTAALKIIRUS} / \text{MASS}$

$K\ddot{O}RGUS(t) = K\ddot{O}RGUS(t-dt) + (V_y) * dt$

INIT $K\ddot{O}RGUS = 0$

INFLOWS:

$V_y = \text{VERTIKAALKIIRUS}$

KAUGUS(t)=KAUGUS (t-dt) + (V_x)*dt

INIT KAUGUS=0

INFLOWS:

V_x=HORISONTAALKIIRUS

MAKSIMAALNE(t)=MAKSIMAALNE(t-dt) + (KAS_MAX)*dt

INIT MAKSIMAALNE=0

INFLOWS:

KAS_MAX=MAX(VERTIKAALKIIRUS)

VERTIKAALKIIRUS(t)=VERTIKAALKIIRUS(t-dt) + (KIIRENDUS_y)*dt

INIT VERTIKAALKIIRUS=ALGKIIRUS*SIN(ALGNURK)

INFLOWS:

KIIRENDUS_y=-9.8-TAKISTUSTEGUR*VERTIKAALKIIRUS/MASS

AEG=TIME

ALGKIIRUS=100

ALGNURK=30*(PI/180)

KAS_MAAS=IF KÕRGUS <=0 THEN PAUSE ELSE 0

MASS=100

TAKISTUSTEGUR=0.2

Lisa 3. Allveelaeva sukeldumise programmikood Stellas

KIIRUS(t)=KIIRUS(t-dt) + (KIIRENDUS)*dt

INIT KIIRUS=0

INFLOWS:

$$\text{KIIRENDUS} = G/\text{MASS} - ((K*S)/\text{MASS})*\text{KIIRUS}$$

$$\text{SÜGAVUS}(t) = \text{SÜGAVUS}(t-dt) + (V_x)*dt$$

$$\text{INIT SÜGAVUS} = 0$$

INFLOWS:

$$V_x = \text{KIIRUS}$$

$$G = 3500$$

$$K = 0.00108$$

$$\text{MASS} = 18750000$$

$$S = 2210$$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kerttu Lääne (22.10.1992),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Dünaamika ülesannete modelleerimine programmi Stella abil“, mille juhendajad on Ella Puman ja Annely Mürk,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 03.06.2015